University College of Southeast Norway

Solutions

Systemidentifikasjon – Løsninger

HANS-PETTER HALVORSEN

http://home.hit.no/~hansha

Innholdsfortegnelse

1 Innledning

Task 1: Systemidentifikasjon

Hva er systemidentifikasjon?

Svar:

Systemidentifikasjon gjør det mulig å lage matematiske modeller av et dynamisk system basert på målinger av inngang- og utgangssignal. Dynamisk betyr at innganger, tilstander og utganger for signalet endrer seg over tid.

Hva kan systemidentifikasjon brukes til?

Svar:

Disse modellene kan så brukes til regulering av systemet (f.eks MPC, Foroverkobling, m.m.) som vi har funnet en modell av eller til prediksjon og tilstandsestimering (f.eks Kalmanfilter, Observer, m.fl.)

Hvordan kan man identifisere et system?

Svar:

Enkelt sagt gjør vi dette ved å velge en eller annen form for modell av systemet, og så tilpasser man parametrene i modellen slik at denne passer best mulig til det fysiske systemet.

[End of Task]

Task 2: Ulike metoder for systemidentifikasjon

Nevn kort ulike metoder for systemidentifikasjon og hva som kjennetegner disse.

Svar:

Her er noen metoder for systemidentifikasjon som vi har fokus på:

- "Prøv og feil metoden"
- Sprangrespons

- Minste kvadraters metode
- Blackbox/Subspace-metoder

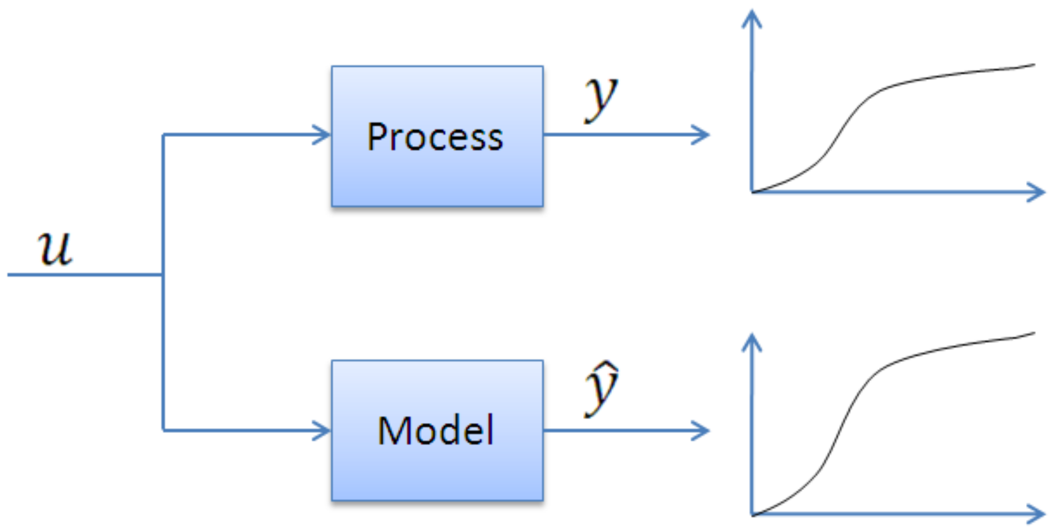
→ Alle metodene går i prinsippet ut på å "logge" input og output data fra det virkelige systemet.

Prøv og feil metoden:

Vi må lage en matematisk modell av prosessen og påtrykker samme pådrag på modellen og den virkelige prosessen. Vi plotter utgangen for modellen ($\hat{y}$) og prosessen (y) i samme plot og sammenligner disse.

Kort fortalt går "Prøv og feil metoden" ut på følgende:

- Vi sammenligner modellrespons med virkelig respons
- Vi justerer verdiene på modellparametrene til vi oppnår ønsket resultat.



Sprangrespons:

Man kan finne modellparametrene ved å utføre en enkel sprangrespons på systemet.

Sprangresponsen for et 1.ordens system er gitt ved følgende transferfunksjon:

$$\boxed{H(s) = \frac{K}{Ts+1}e^{-\tau s}}$$

der:

K er prosessens forsterkning

T er prosessens tidskonstant

τ er prosessens dødtid

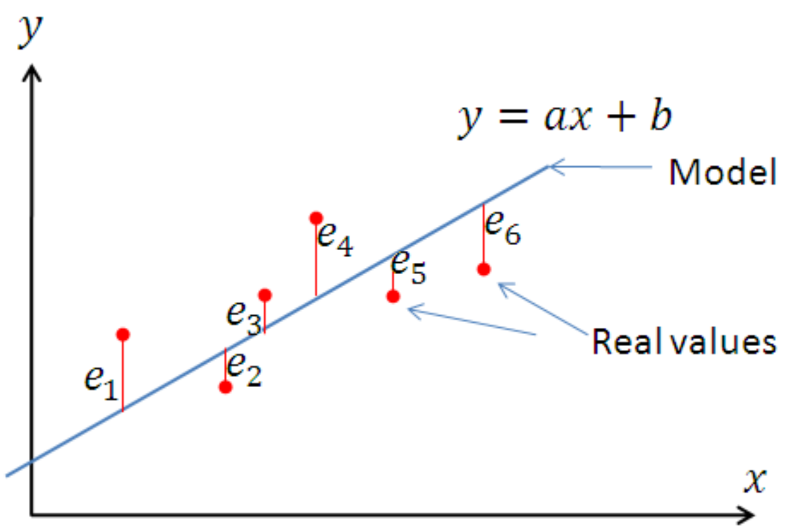
Minste kvadraters metode:

Modellen på settes opp på følgende form basert på input-output data:

$$\boxed{Y = \Phi\theta}$$

kjent fra matematikken, løse et lineært ligningssystem

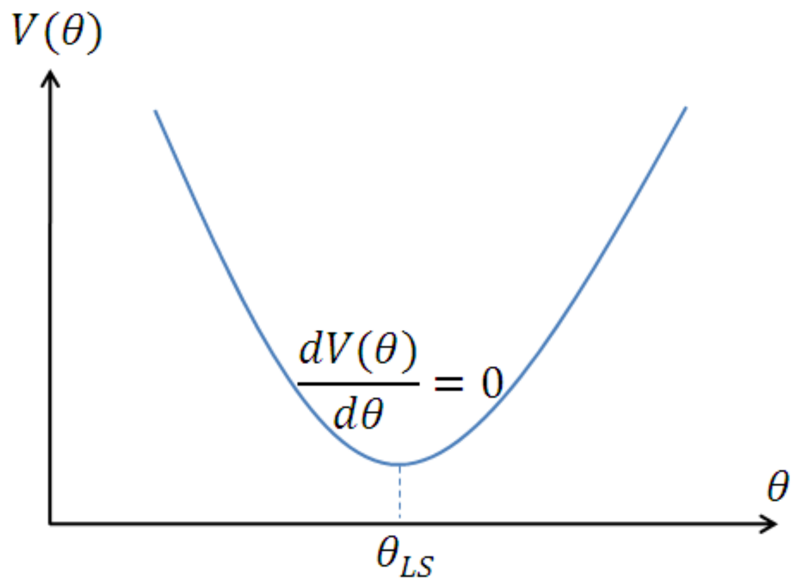
$$Ax = b$$



→ Ønsker å minimalisere summen av avvikene $e_1, e_2, e_3, \cdots, e_m$

$$V(\theta) = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + \cdots + e_m^2$$

$$\frac{dV(\theta)}{d\theta} = 0$$



Ut fra dette kan vi utlede følgende formel:

$$\boxed{\theta_{LS} = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T Y}$$

<u>Blackbox, subspace-metoder:</u>

I en Blackbox modell kjenner vi ikke til modellen, men vi bruker algoritmer til å finne en matematisk modell basert på input og output data.

Kort fortalt går Subspace-metoder ut på følgende:

- Finne en matematisk modell som <u>ikke</u> er basert på fysiske lover (Newtons lover, m.fl)
- Finner modell basert på input (pådrag) – output (målinger) data

[End of Task]

Task 3: Prosedyre for systemidentifikasjon

Nevn de ulike stegene som vanligvis inngår ved systemidentifikasjon.

Tegn gjerne en skisse og forklar kort de ulike stegene som inngår.

<u>Svar:</u>

I systemidentifikasjon inngår ulike steg, i hovedsak har vi følgende:

1. **<u>Eksperimenter</u>** – Vi setter opp et eksperiment og samler inn et sett med data fra inngangssignaler og utgangssignaler fra systemet som vi ønsker å identifisere. Det er viktig at systemet blir tilstrekkelig eksitert.
2. **<u>Oppsplitting</u>** - Dele opp dataene i ulike datasett; ett datasett brukes til å finne modellen, mens det andre datasettet brukes til å validere modellen.
3. **<u>Modellestimering</u>** – Vi finner modellen eller modellparametrene vha en eller flere systemidentifikasjonsmetoder (Minste kvadraters metode, Black-box, osv.).
4. **<u>Validering</u>** – Sjekk om modellen er bra nok vha f.eks simuleringer. Her er det viktig at vi bruker valideringsdataene – og ikke de samme dataene som vi brukte når vi fant modellen i trinn 3.

[End of Task]

2 Minste kvadraters metode

Her kommer noen oppgaver ifm Minste kvadraters metode, eller Least Square method (LS) som det heter på engelsk.

Task 4: Løse likningssett

Gitt følgende likninger:

$$x_1 + 2x_2 = 5$$

$$3x_1 + 4x_2 = 6$$

Sett opp likningene på formen $Ax = b$ og løs likningssettet ($x = A^{-1}b$). Bruk håndregning, samt kontroller svaret vha MathScript.

Svar:

Disse kan skrives på formen ($Ax = b$):

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}}_{b}$$

Den enkleste måten å løse likningssettet på er:

$$x = A^{-1}b$$

Innsatt får vi:

$$x = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 4.5 \end{bmatrix}$$

MathScript:

Vi kan f.eks bruke MathScript for å finne svaret:

```
A=[1 2; 3 4];
b=[5; 6];

x=inv(A)*b
```

Vi får da følgende svar:

```
x =

          -4

           4.5
```

2 Løs Likningssettet vha Minste kvadraters metode $\boldsymbol{\theta_{LS} = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T Y}$

Blir resultatet det samme?

Svar:

Vi får:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}}_{\Phi}\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}}_{\theta}$$

Minste kvadraters metode:

$$\theta_{LS} = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T Y$$

$$\theta_{LS} = \left(\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\4.5\end{bmatrix}$$

MathScript kode:

```
phi=[1 2; 3 4];
Y=[5; 6];
theta = inv(phi'*phi)*phi'*Y
```

Svaret blir det samme, nemlig

```
theta =     -4

            4.5
```

Vi ser at resultatet blir det samme.

[End of Task]

Task 5: Finn Minste kvadraters løsning

Gitt

$$Y = \Phi\theta$$

der:

$$\Phi = \begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}$$

1 Finn $\boldsymbol{\theta}$ vha Minste kvadraters metode (penn og papir)

Svar:

Vi har at:

$$\theta_{LS} = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T Y$$

Vi får da:

$$\Phi^T\Phi = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \Phi^T Y = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

som gir:

$$\theta_{LS} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Altså:

$$\underline{\theta_{LS} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

2 Sjekk svaret vha MathScript og LabVIEW

Svar:

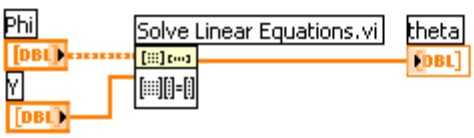
MathScript:

```
clear clc

Phi =        [0, -1;
             -1, 1;
             1, -1];

Y = [-1; 1; 0];

theta = Phi\Y

%or

theta2 = inv(Phi'*Phi)*Phi'*Y
```

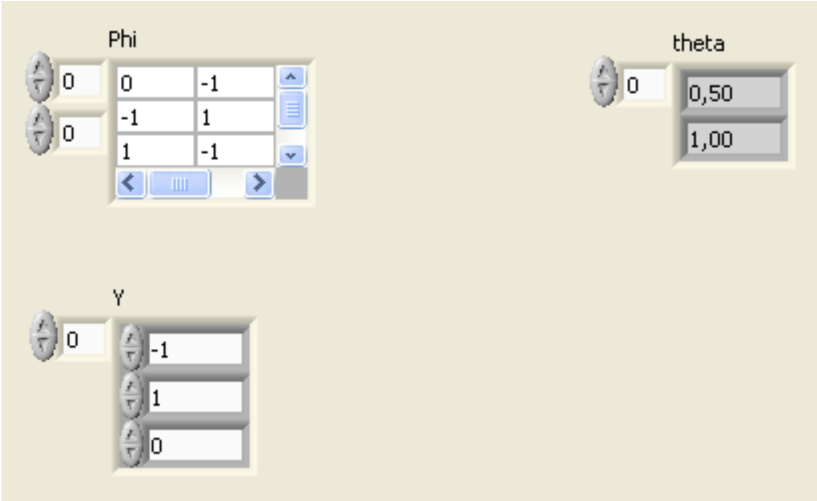
Svaret blir det samme, dvs. $\theta_{LS} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$

LabVIEW:

Block Diagram:

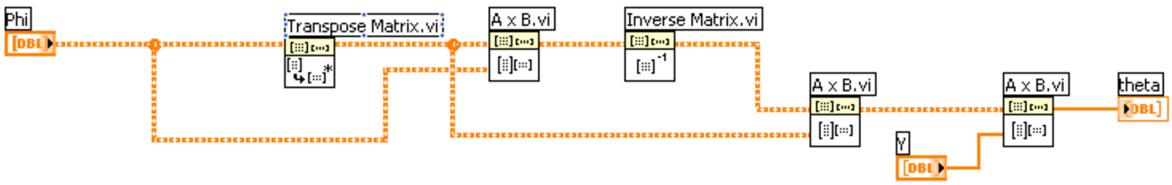


Front Panel:



Alternativt:

$$\theta_{LS} = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T Y$$



Som selvfølgelig gir samme svar.

3 Kan systemet løses vha $\theta = \Phi^{-1}Y$?

Svar:

Nei! Φ er ikke kvadratisk og kan ikke inverteres.

[End of Task]

Task 6: Minste kvadraters metode

Gitt følgende modell:

$$y(u) = au + b$$

Følgende verdier er funnet fra eksperimenter:

$$y(1) = 0.8$$

$$y(2) = 3.0$$

$$y(3) = 4.0$$

Vi ønsker å finne de ukjente modellparametrene a and b ved å bruke Minste kvadraters metode.

1 Finn a and b vha håndregning (penn og papir)

<u>Svar:</u>

Vi har følgende:

$$Y = \Phi\theta$$

der

θ er en vektor med de ukjente parametrene som vi ønsker å finne verdiene på

Y er en vektor med kjente målinger (basert på loggedata)

Φ er den såkalte regresjonsmatrisen. Denne matrisen består av kjente verdier (basert på loggedata)

Minste kvadraters løsning for likningen $Y = \Phi Y$ er da gitt ved følgende formel:

$$\boxed{\boldsymbol{\theta_{LS} = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T Y}}$$

Dermed får vi:

$$0.8 = a \cdot 1 + b$$

$$3.0 = a \cdot 2 + b$$

$$4.0 = a \cdot 3 + b$$

Som blir:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0.8 \\ 3.0 \\ 4.0 \end{bmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}_{\Phi} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\theta}$$

Minste kvadraters løsning blir da:

$$\theta_{LS} = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T Y$$

Innsatt får vi:

$$\theta_{LS} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 \\ 3.0 \\ 4.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6 \\ -0.6 \end{bmatrix}$$

2 Finn a and b vha MathScript

Svar:

MathScript:

Vi definerer Y og Φ i MathScript og finner θ:

```
phi = [1 1; 2 1; 3 1];
Y = [0.8 3.0 4.0]';

theta = inv(phi'*phi)* phi'*Y

%or simply by
theta=phi\Y
```

Svaret blir:

```
theta =     1.6

           -0.6
```

Dvs.:

$$a = 1.6$$

$$b = -0.6$$

Som gir følgende modell:

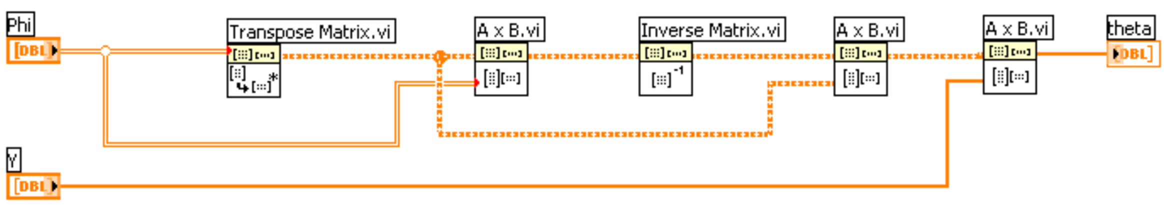
$$\underline{\underline{y(u) = 1.6u - 0.6}}$$

3 Finn a and b vha LabVIEW

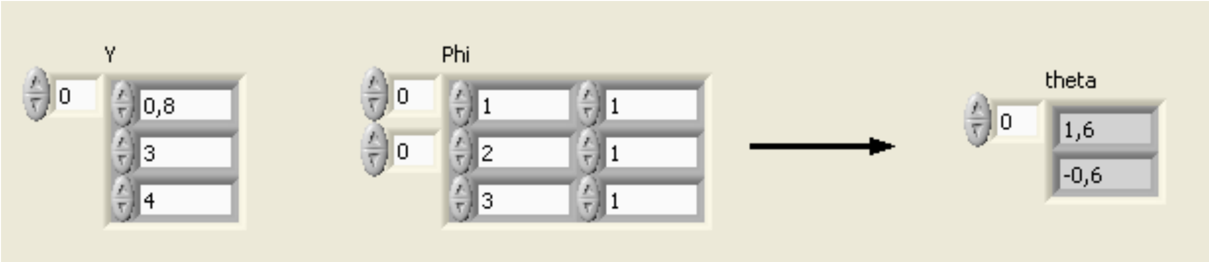
Svar:

LabVIEW:

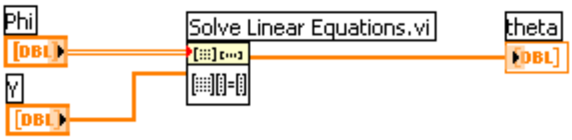
Blokkdiagrammet blir som følger:



Frontpanelet blir som følger:



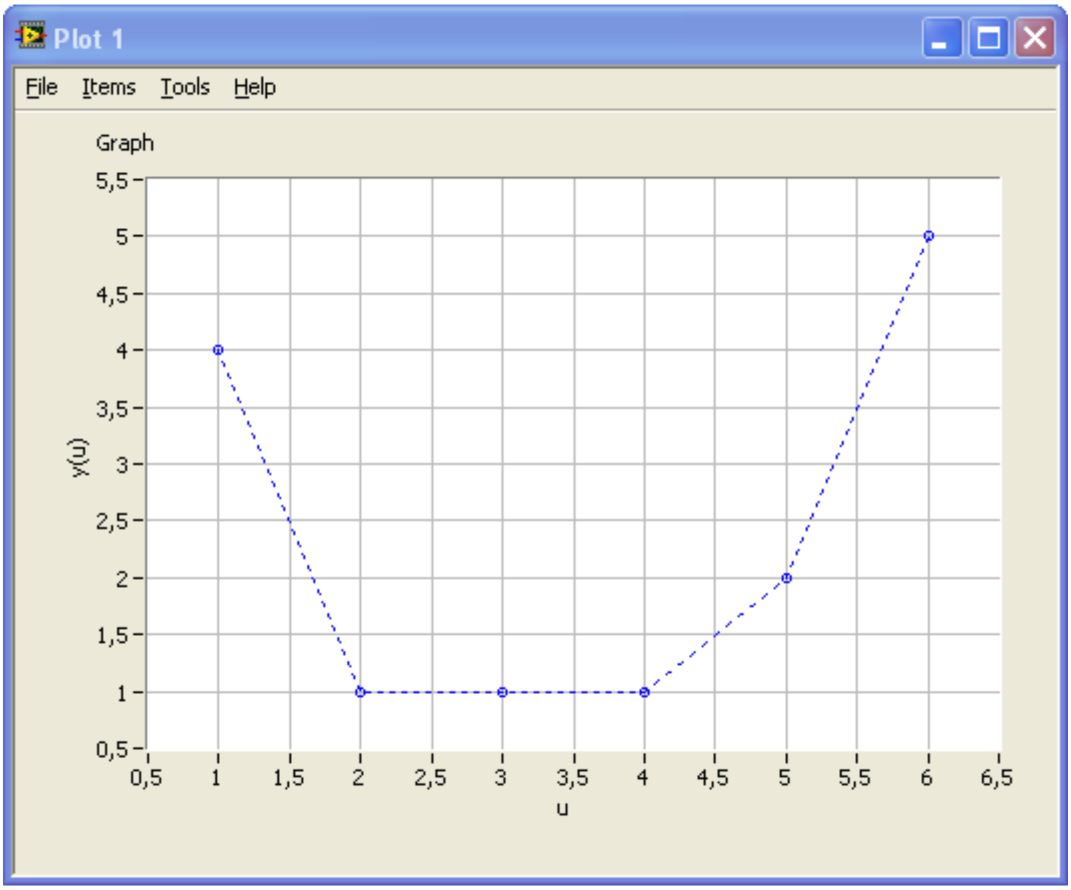
Wi kan også bruke funksjonen “**Solve Linear Equations.vi**” direkte:



[End of Task]

Task 7: Kvadratisk kurve

Vi har logget følgende data for et gitt system:



Som du ser av kurven har vi for 6 forskjellige verdier av u (pådraget) logget utgangen $y(u)$.

Ut fra formen på kurven ønsker vi å tilpasse dette til en 2.ordens modell på følgende form:

$$y(u) = au^2 + bu + c$$

Finn modellparametrene (a, b, c) basert på dataene gitt i plottet.

Finn modellparametrene (a, b, c) vha Minste kvadraters metode ved å bruke følgende:

1. Håndregn ved å bruke penn & papir
2. Regn ut vha MathScript
3. Regn ut vha LabVIEW

Tips! Sett systemet opp på følgende form (regresjonsmodell):

$$y = \varphi\theta$$

Deretter på formen:

$$Y = \Phi\theta$$

og løs θ vha:

$$\theta_{LS} = (\Phi^{\mathrm{T}}\Phi)^{-1}\Phi^{\mathrm{T}}\mathrm{Y}$$

Svar:

Vi setter opp på formen

$$y = \varphi\theta$$

og får følgende:

$$\underline{y = \begin{bmatrix} u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}$$

Vi setter opp på formen

$$Y = \Phi\theta$$

og får følgende:

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ y(4) \\ y(5) \\ y(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathrm{u}^2(1) & \mathrm{u}(1) & 1 \\ \mathrm{u}^2(2) & \mathrm{u}(2) & 1 \\ \mathrm{u}^2(3) & \mathrm{u}(3) & 1 \\ \mathrm{u}^2(4) & \mathrm{u}(4) & 1 \\ \mathrm{u}^2(5) & \mathrm{u}(5) & 1 \\ \mathrm{u}^2(6) & \mathrm{u}(6) & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \\ 25 & 5 & 1 \\ 36 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Løser vha **MathScript**:

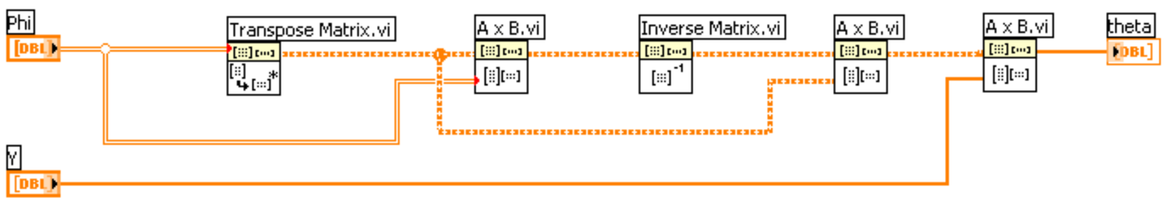
```
u=[1, 2, 3, 4, 5, 6];

Y = [4, 1, 1, 1, 2, 5]';
phi = [ u(1)^2, u(1), 1;
            u(2)^2, u(2), 1;
            u(3)^2, u(3), 1;
            u(4)^2, u(4), 1;
            u(5)^2, u(5), 1;
            u(6)^2, u(6), 1];

theta = inv(phi'*phi)*phi'*Y
```

```
theta =

         0.6071

        -4.0214

         7.2
```

Dette gir følgende svar:

$$\theta = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.6 \\ -4.0 \\ 7.2 \end{bmatrix}$$

LabVIEW:



→ Svaret blir det samme

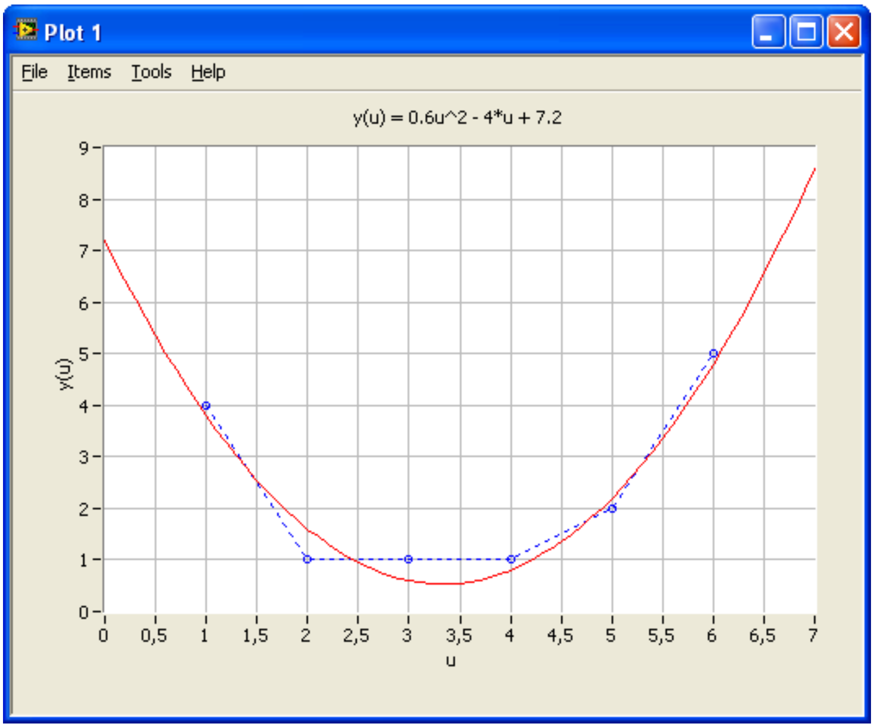
2 Bruk MathScript til å plotte punktene over sammen med modellen i ett og samme plot (med innsatte verdier for a, b, c).

Svar:

MathScript kode:

```
clc
clear

u=[1, 2, 3, 4, 5, 6];
y=[4, 1, 1, 1, 2, 5];

x=0:0.1:7;
a = 0.6;
b = -4.0;
c = 7.2;

y_model = a.*x.^2 + b.*x + c;

figure(2)
plot(x, y_model, 'r')
hold
plot(u, y, ':o')
axis([0, 7, 0, 9])
title('y(u) = 0.6u^2 - 4*u + 7.2')
xlabel('u')
ylabel('y(u)')
grid
```

Plottet blir som følger:

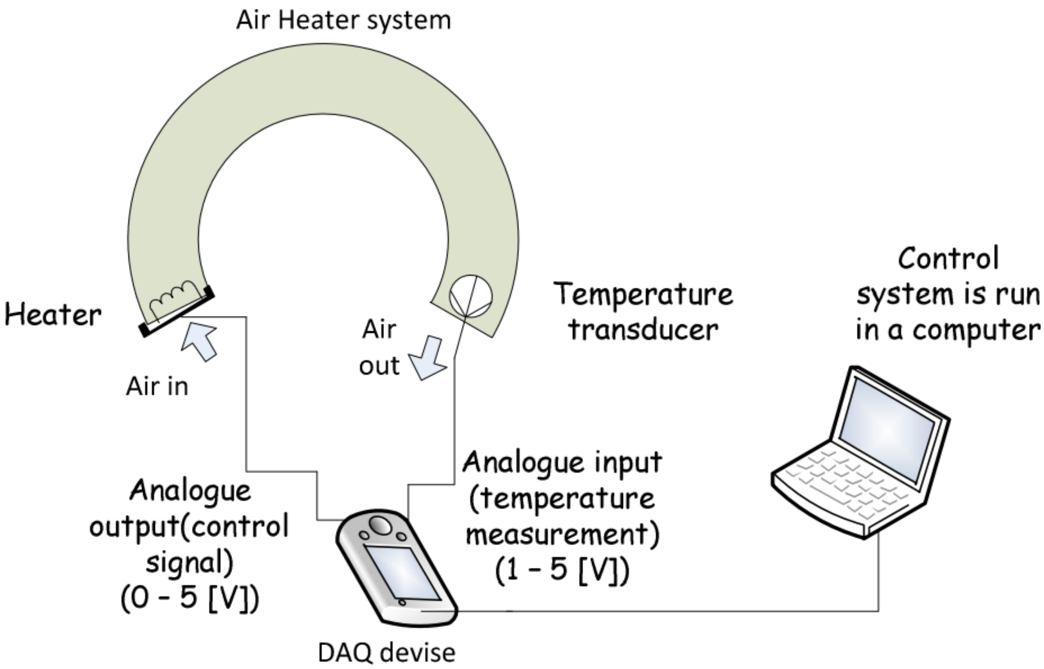


Vi ser at modellen gir et bra resultat når vi sammenligner med de loggede dataene.

[End of Task]

Task 8: Skalering vha Minste kvadraters metode

Gitt følgende varmluftsprosess:



Systemet har følgende matematiske modell:

$$\dot{T}_{out} = \frac{1}{\theta_t}\{-T_{out} + [K_h u(t-\theta_d) + T_{env}]\}$$

hvor:

- $u\ [V]$ er kontrollsignalet til varmeelementet
- $\theta_t\ [s]$ er tidskonstanten til systemet
- $K_h\ [deg\ C\ /\ V]$ er varneelementets forsterkning
- $\theta_d\ [s]$ er tidsforsinkelsen i systemet
- T_{env} er romtemperaturen

Vi ønsker å logge temperaturen vha en DAQ enhet som gir oss et spenningssignal mellom $1-5V$. Dette signalet ønsker vi å konvertere til en temperaturverdi mellom $20-50$°C, dvs. vi trenger å skalere $1-5V$ til $20-50$°C.

Siden dette vil være en lineær skalering kan vi bruke følgende:

$$y(x) = ax + b$$

Vi ønsker å finne parametrene a og b for denne funksjonen vha Minste kvadraters metode.

Vi har 2 punkter på linja:

$$(x1, y1) = (1, 20)$$

$$(x2, y2) = (5, 50)$$

Sjekk svaret vha MathScript.

Svar:

Vi ønsker å sette det opp på regresjonsformen $Y = \Phi\theta$ og får følgende:

$$20 = a \cdot 1 + b$$

$$50 = a \cdot 5 + b$$

som gir:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 20 \\ 50 \end{bmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}}_{\Phi} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\theta}$$

Vi bruker Minste kvadraters metode for å løse dette:

$$\theta_{LS} = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T Y$$

Innsatt:

$$\theta_{LS} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 20 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.5 \\ 12.5 \end{bmatrix}$$

MathScript:

Dette kan gjøres på følgende måte i MathScript:

```
phi = [1, 1; 5 ,1];
Y = [20; 50];
theta_ls = inv(phi'*phi)*phi'*Y
```

evt kan vi bruke den innebygde operatoren ”\”:

```
theta_ls = phi\Y
```

Svaret blir det samme, dvs:

```
theta_ls =

          7.5

          12.5
```

Dvs.:

$$\theta = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.5 \\ 12.5 \end{bmatrix}$$

Dette gir:

$$\underline{\underline{y(x) = 7.5x + 12.5}}$$

[End of Task]

Task 9: Dynamisk system

Gitt følgende system:

$$\dot{x} = -\frac{1}{T}x + Ku$$

der

T er tidskonstanten til systemet

K er f.eks Pumpeforsterkningen

Sett opp systemet på formen $\boldsymbol{y = \varphi\theta}$

Svar:

Vi får:

$$\underbrace{\dot{x}}_{y} = \underbrace{[x \quad u]}_{\varphi} \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{T} \\ K \end{bmatrix}}_{\theta}$$

dvs.

$$\theta = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T} \\ K \end{bmatrix}$$

For å finne θ vha minste kvadraters metode må vi logge input og output data, dermed må vi diskretisere.

Vi bruker Euler forover for å diskretisere:

$$\dot{x} \approx \frac{x_{k+1} - x_k}{T_s}$$

der T_s er samplingstiden.

Da får vi:

$$\underbrace{\frac{x_{k+1} - x_k}{T_s}}_{y} = \underbrace{[x_k \quad u_k]}_{\varphi} \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{T} \\ K \end{bmatrix}}_{\theta}$$

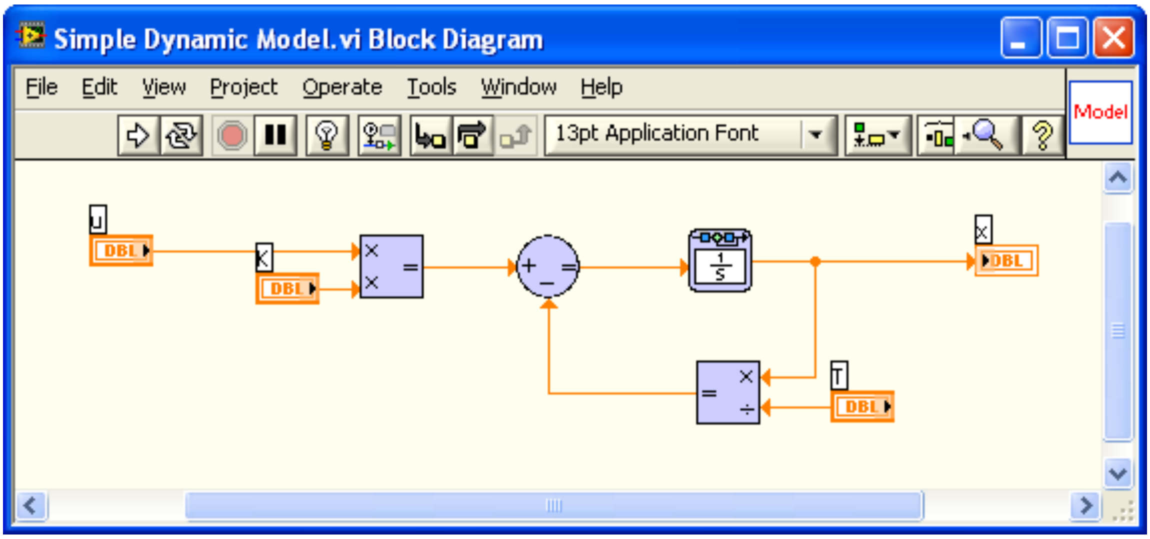
2 Implementer modellen i LabVIEW. Sett $T = 5$ og $K = 2$ og simuler systemet.

Tips! Implementer modellen vha "Simulation Subsystem" og implementer systemet vha tilgjengelige blokker.

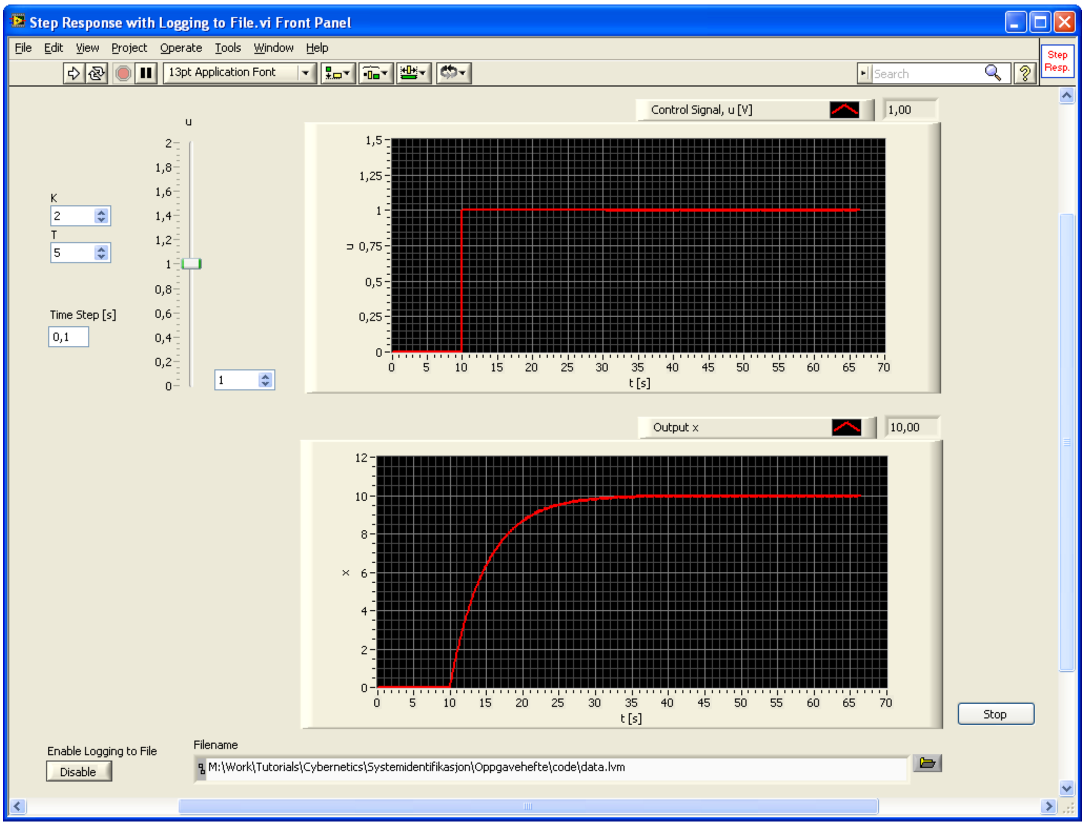
Plot sprangresponsen for systemet.

Svar:

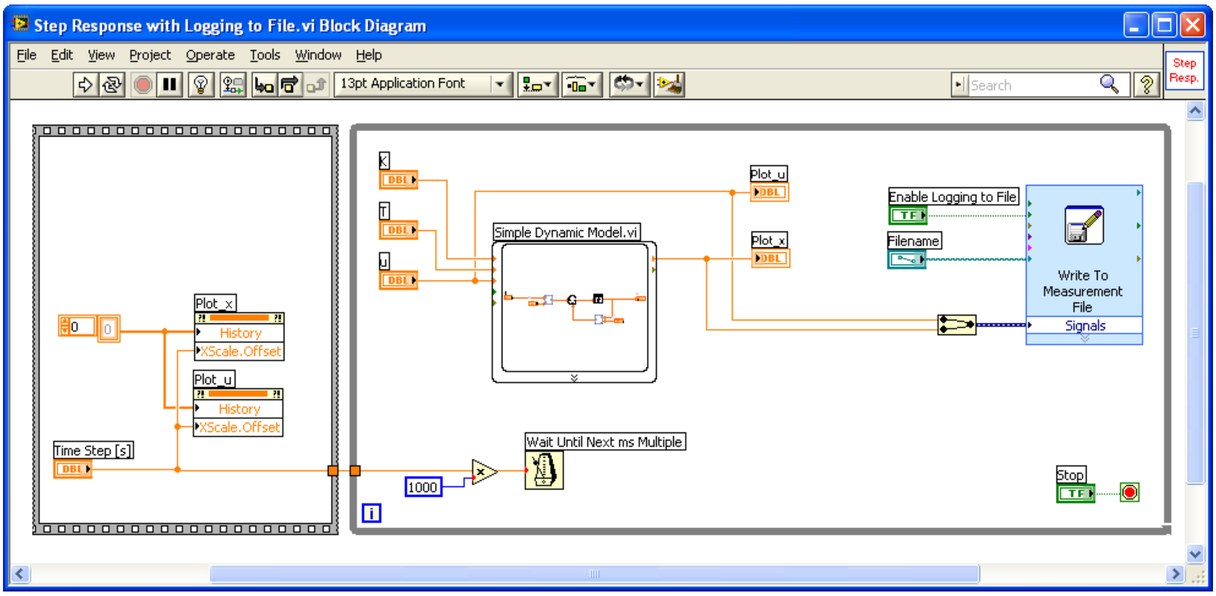
Implementerer modellen i et Simulation Subsystem:



Sprangrespons:



Blokkdiagram:



Finn transferfunksjonen for systemet:

$$H(s) = \frac{x(s)}{u(s)}$$

Sammenlign og diskuter resultatet med sprangresponsen fra forrige deloppgave

Svar:

$$\dot{x} = -\frac{1}{T}x + Ku$$

Laplace:

$$sx(s) = -\frac{1}{T}x(s) + Ku(s)$$

Videre:

$$sx(s) + \frac{1}{T}x(s) = Ku(s)$$

Videre:

$$x(s)\left(s + \frac{1}{T}\right) = Ku(s)$$

Videre:

$$\frac{x(s)}{u(s)} = \frac{K}{s + \frac{1}{T}}$$

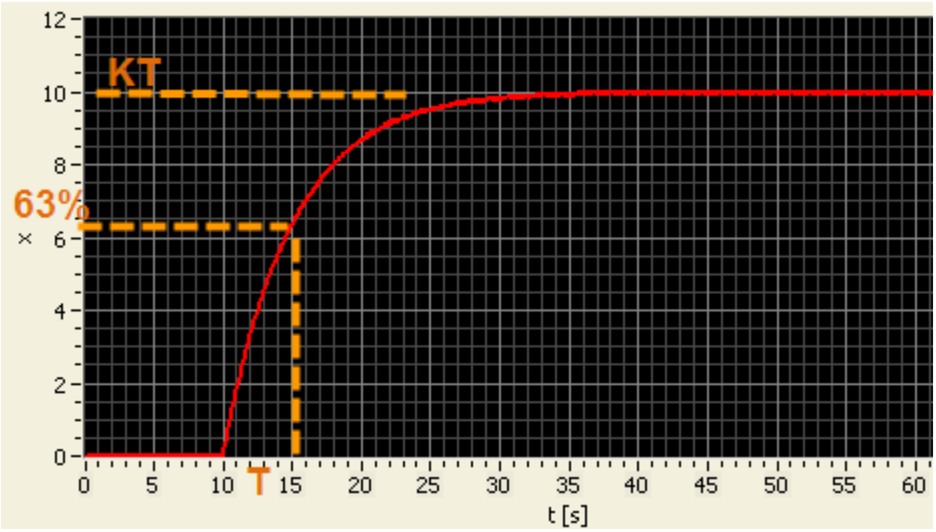
Som gir:

$$H(s) = \frac{x(s)}{u(s)} = \frac{KT}{Ts+1}$$

Insatt med verdier ($T = 5$ og $K = 2$):

$$H(s) = \frac{x(s)}{u(s)} = \frac{10}{5s+1}$$

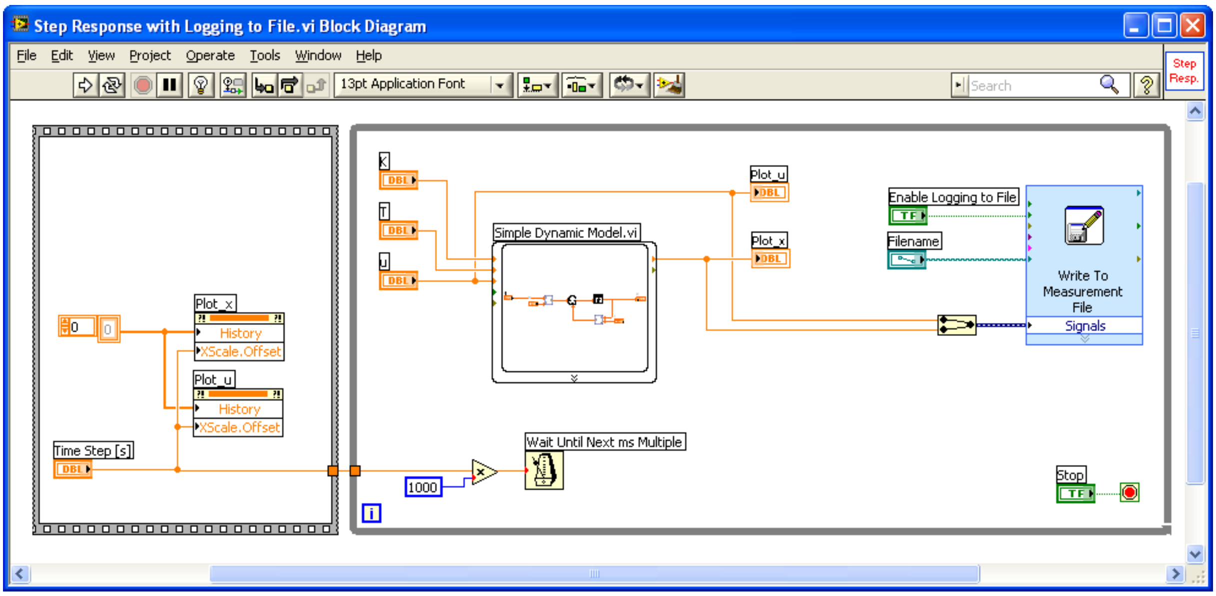
→ Ut fra sprangresponsen i forrige deloppgave ser vi at dette er riktig resultat.



4 **Bruk modellen som du implementerte i en tidligere deloppgave som utgangspunkt. Bruk denne til å logge input (u) og output data (x).**

Lagre de loggede dataene til fil vha "Write To Measurement File".

Svar:



Finn modellparametrene (T og K) vha Minste kvadraters metode i LabVIEW.

Merk! Svaret bør da bli $T \approx 5$ og $K \approx 2$.

Svar:

Vi lager et program i LabVIEW som setter de loggede dataene opp på formen:

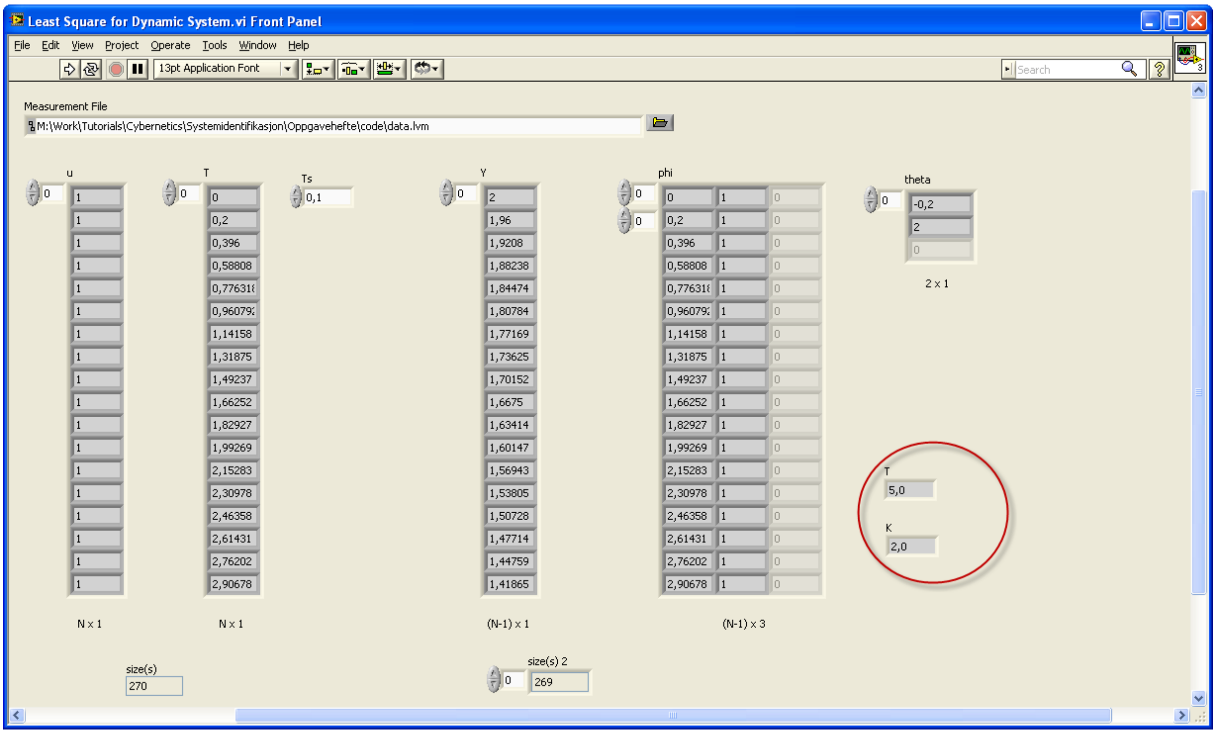
$$\underbrace{\frac{x_{k+1} - x_k}{T_s}}_{y} = \underbrace{[x_k \quad u_k]}_{\varphi} \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{T} \\ K \end{bmatrix}}_{\theta}$$

Deretter finner vi $\theta\ (T\ og\ K)$ ut fra formelen:

$$\theta_{LS} = (\Phi^{\mathrm{T}}\Phi)^{-1}\Phi^{\mathrm{T}}Y$$

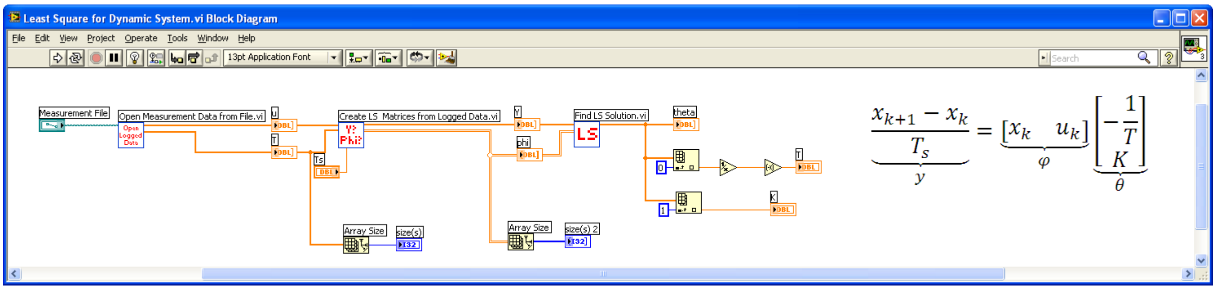
Dette gir følgende LabVIEW program:

Frontpanelet:



→ Vi ser at svaret blir riktig (rød sirkel over)

Blokkdiagrammet:



Vi har delt opp løsningen ved å bruke flere SubVIs:

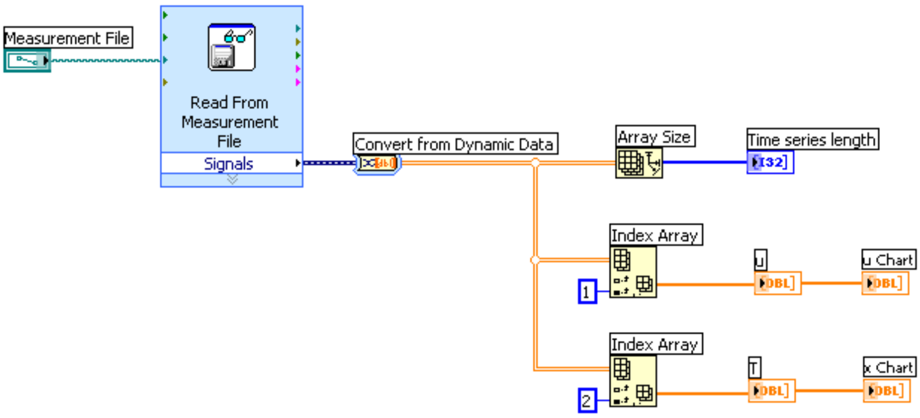
- Open Measurement Data from File.vi
- Create LS Matrices from Logged Data.vi
- Find LS Solution.vi

De forskjellige SubVI'ene gjør følgende:

Open Measurement Data from File.vi

Denne SubVI'en åpner de loggede dataene fra fila laget i en tidligere deloppgave.

Blokkdiagrammet er som følger:

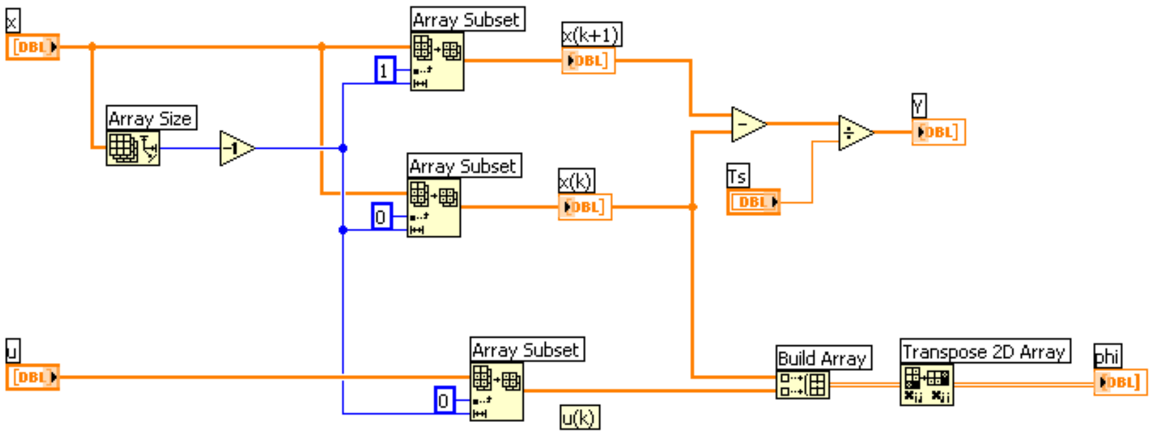


Create LS Matrices from Logged Data.vi

Denne SubVI "stacker" loggedataene på denne formen:

$$\underbrace{\frac{x_{k+1} - x_k}{T_s}}_{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_k & u_k \end{bmatrix}}_{\varphi} \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{T} \\ K \end{bmatrix}}_{\theta}$$

Blokkdiagrammet er som følger:

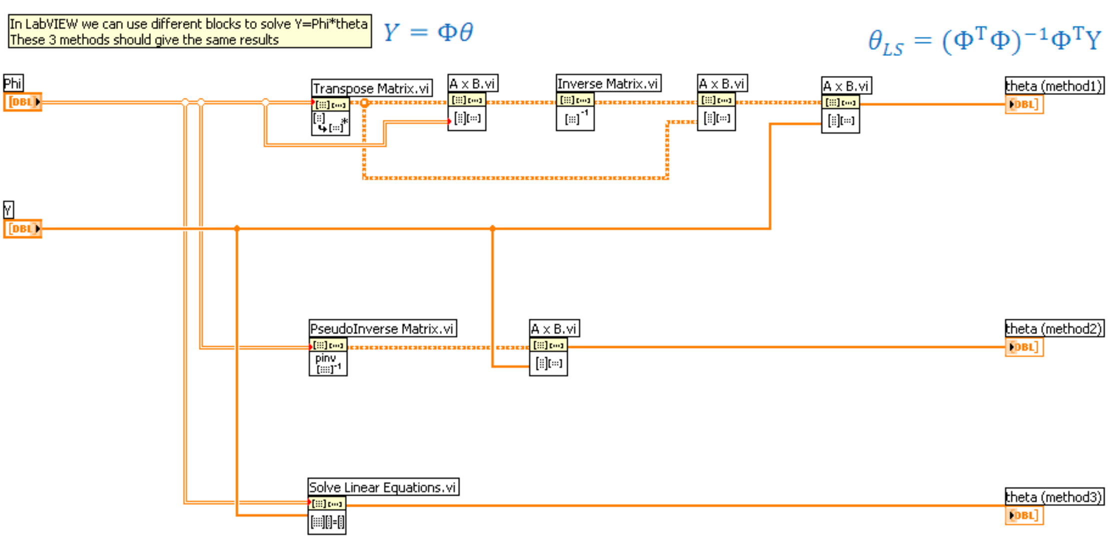


Find LS Solution.vi

Denne finner Minste kvadraters løsning.

$$\theta_{LS} = (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T Y$$

Blokkdiagrammet er som følger:



[End of Task]

Task 10: Dynamisk system med tidsforsinkelse

Gitt følgende system (med dødtid):

$$\dot{x} = -\frac{1}{T}x + Ku(t-\tau)$$

der

T er tidskonstanten til systemet

K er f.eks Pumpeforsterkningen

τ er dødtiden i systemet.

Sett opp systemet på formen $y = \varphi\theta$

Svar:

Vi får:

$$\underbrace{\dot{x}}_{y} = \underbrace{[x \quad u(t-\tau)]}_{\varphi} \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{T} \\ K \end{bmatrix}}_{\theta}$$

dvs.

$$\theta = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T} \\ K \end{bmatrix}$$

For å finne θ vha minste kvadraters metode må vi logge input og output data, dermed må vi diskretisere.

Vi bruker Euler forover for å diskretisere:

$$\dot{x} \approx \frac{x_{k+1} - x_k}{T_s}$$

der T_s er samplingstiden.

Da får vi:

$$\underbrace{\frac{x_{k+1} - x_k}{T_s}}_{y} = \underbrace{[x_k \quad u_{k-\frac{\tau}{T_s}}]}_{\varphi} \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{T} \\ K \end{bmatrix}}_{\theta}$$

Anta $\tau = 3s$, får da (med $T_s = 0.1$):

$$\underbrace{\frac{x_{k+1} - x_k}{T_s}}_{y} = \underbrace{[x_k \quad u_{k-30}]}_{\varphi} \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{T} \\ K \end{bmatrix}}_{\theta}$$

NB! På 3 sekunder logger vi 30 punkter med $T_s = 0.1$!!!

2 Gitt følgende loggedata (dataene er ikke realistiske)

k	u	y
1	0.9	3
2	1.0	4
3	1.1	5
4	1.2	6
5	1.3	7
6	1.4	8
7	1.5	9

Vi har brukt følgende samplingstid: $\boldsymbol{T_s = 1s}$

Ut fra en enkel sprangrespons har vi funnet dødtiden til å være: $\tau = 3$.

Sett systemet opp på formen $Y = \Phi\theta$

Svar:

Med $\tau = 3$ har vi fra forrige deloppgave:

$$\underbrace{\frac{x_{k+1} - x_k}{T_s}}_{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_k & u_{k-3} \end{bmatrix}}_{\varphi} \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{T} \\ \frac{K}{T} \end{bmatrix}}_{\theta}$$

Vi kan da sette opp på formen $Y = \Phi\theta$:

$$\begin{bmatrix} 7-6 \\ 8-7 \\ 9-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0.9 \\ 7 & 1.0 \\ 8 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{T} \\ \frac{K}{T} \end{bmatrix}$$

Dvs.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 6 & 0.9 \\ 7 & 1.0 \\ 8 & 1.1 \end{bmatrix}}_{\Phi} \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{T} \\ \frac{K}{T} \end{bmatrix}}_{\theta}$$

Merk! Vi må passe på at dimensjonene stemmer.

Finn modellparametrene (θ). Kontroller svaret vha MathScript

MathScript gir:

```
clear, clc

Y = [1, 1, 1]';
phi = [6, 0.9; 7, 1.0; 8, 1.1];


theta = phi\Y

%or
theta = inv(phi'*phi)*phi'*Y

T = -1/theta(1)
K = theta(2)
```

Som gir følgende svar:

```
theta =

           -0.3333

            3.3333

T =

            3

K =

            3.3333
```

Dvs modellparametrene er:

$$T = 3, \qquad K = \frac{10}{3}, \qquad \tau = 3$$

Dvs. det gir følgende modell:

$$\dot{x} = -\frac{1}{T}x + Ku(t - \tau)$$

med innsatte verdier får vi:

$$\dot{x} = -\frac{1}{3}x + \frac{10}{3}(t - 3)$$

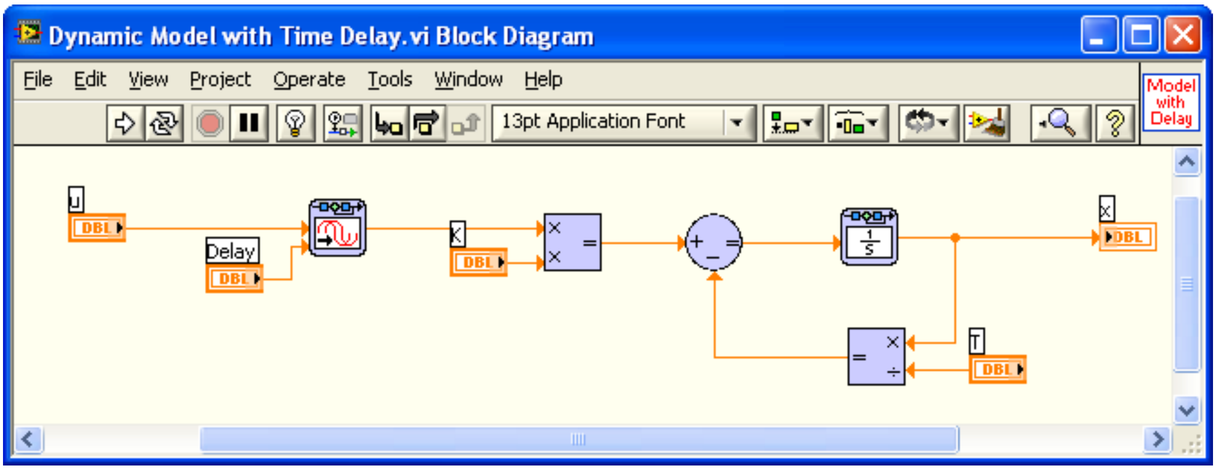
3 Implementer modellen i LabVIEW. Sett $T = 5,\ K = 2,\ \tau = 3$ og simuler systemet.

Tips! Implementer modellen vha ”Simulation Subsystem” og implementer systemet vha tilgjengelige blokker.

Plot sprangresponsen for systemet.

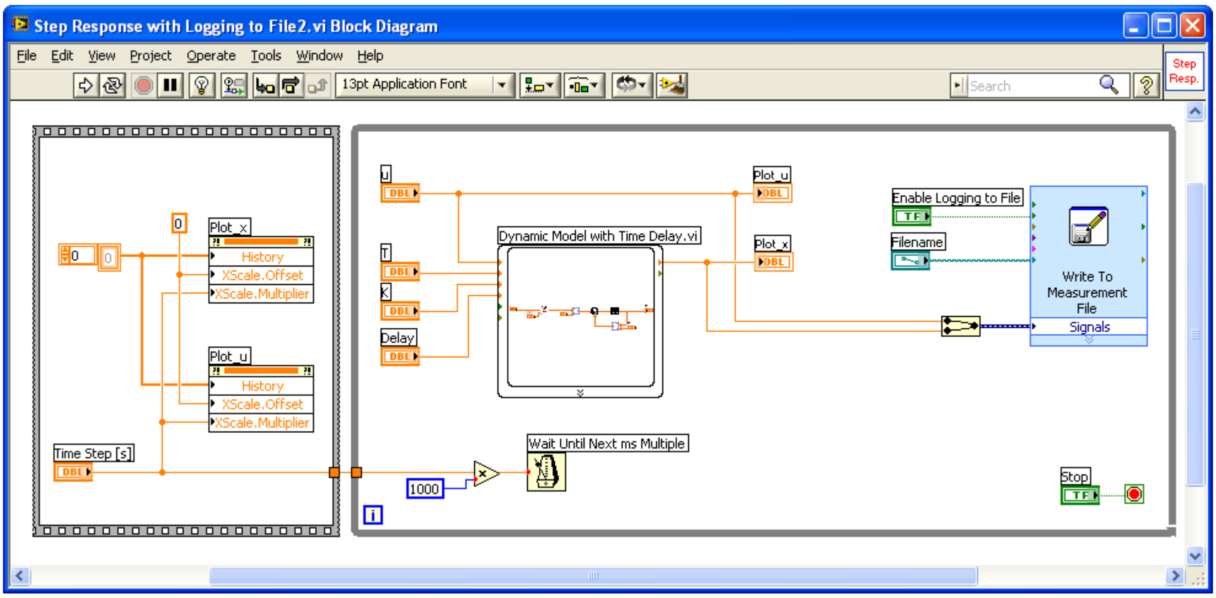
Svar:

Modellen kan implementeres som følger:

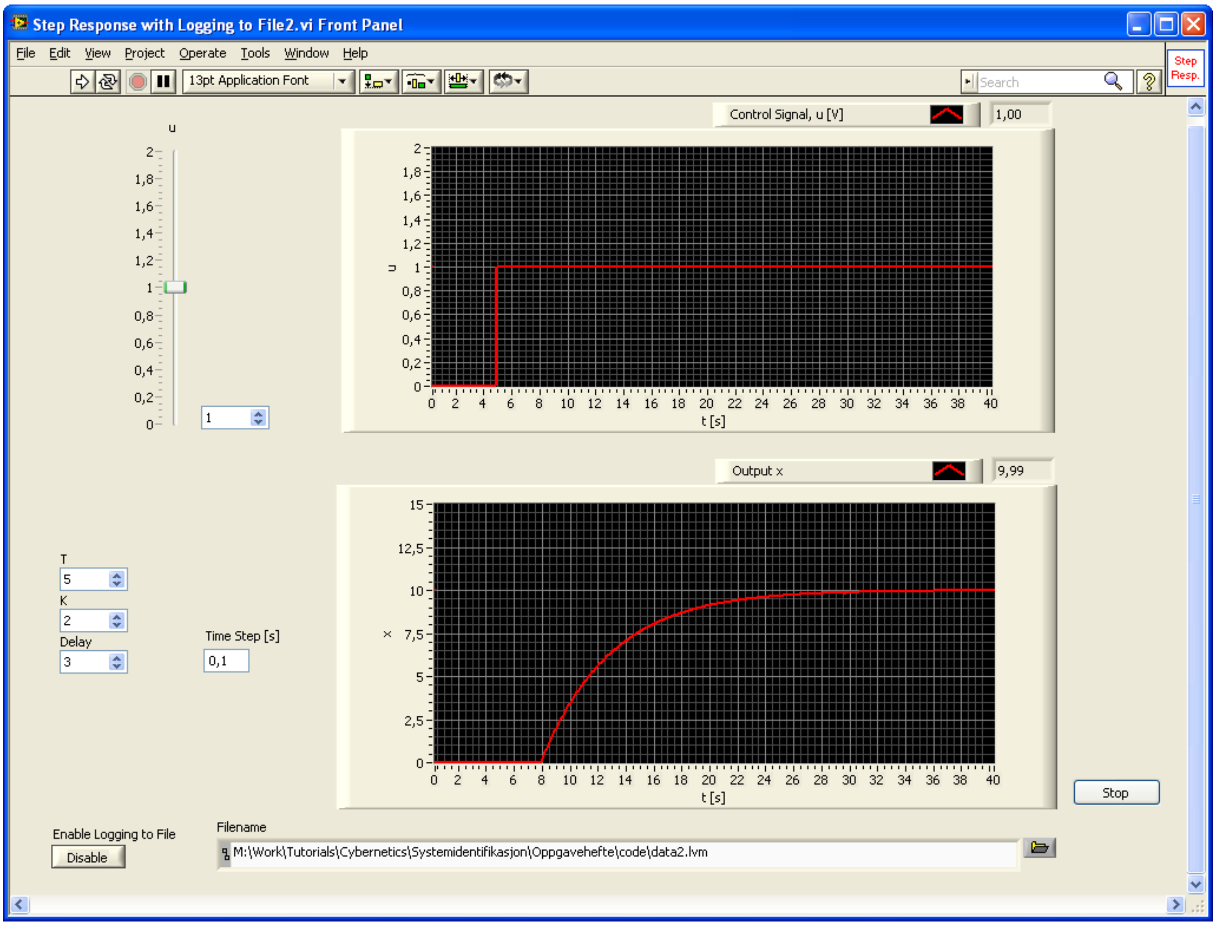


Vi simulerer modellen vha følgende program:

Block Diagram:



Front Panel:



Finn transferfunksjonen for systemet:

$$H(s) = \frac{x(s)}{u(s)}$$

Sammenlign og diskuter resultatet med sprangresponsen fra forrige deloppgave.

Plott sprangresponsen for transferfunksjonen i MathScript.

Tips! Bruk *step()* funksjonen.

Svar:

Vi tar utgangspunkt i differensialikningen

$$\dot{x} = -\frac{1}{T}x + Ku(t - \tau)$$

Laplace:

$$sx(s) = -\frac{1}{T}x(s) + Ku(s)e^{-\tau s}$$

NB! Vi bruker følgende Laplace transformasjon:

$$F(s)e^{-\tau s} \Leftrightarrow f(t-\tau)$$

$$sF(s) \;\Leftrightarrow \dot{f}(t)$$

Videre:

$$sx(s) + \frac{1}{T}x(s) = Ku(s)e^{-\tau s}$$

Videre:

$$x(s)\left(s + \frac{1}{T}\right) = Ku(s)e^{-\tau s}$$

Videre:

$$\frac{x(s)}{u(s)} = \frac{K}{s + \frac{1}{T}}e^{-\tau s}$$

Som gir:

$$H(s) = \frac{x(s)}{u(s)} = \frac{KT}{Ts+1}e^{-\tau s} = \frac{K_{tot}}{Ts+1}e^{-\tau s}$$

Insatt med verdier ($T = 5,\; K = 2,\; \tau = 3$):

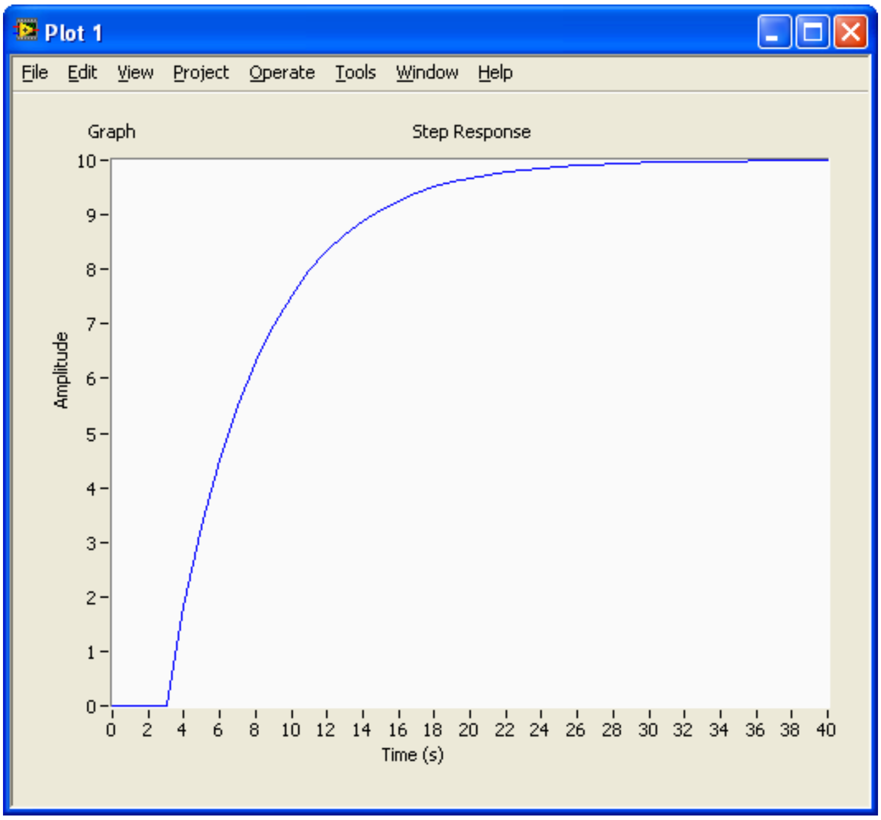
$$H(s) = \frac{x(s)}{u(s)} = \frac{10}{5s+1}e^{-3s}$$

MathScript:

Vi implementerer transferfunksjonen i MathScript og utfører en sprangrespons.

```
clear, clc

s=tf('s');
K=2;
T=5;

H1=tf(K*T/(T*s+1));

delay=3;
H2=set(H1,'inputdelay',delay);
step(H2)

% You may also use:
figure(2)
H = sys_order1(K*T, T, delay)
step(H)
```

Sprangresponsen blir som følger:



→ Vi ser at sprangresponsen er den samme som i forrige deloppgave.

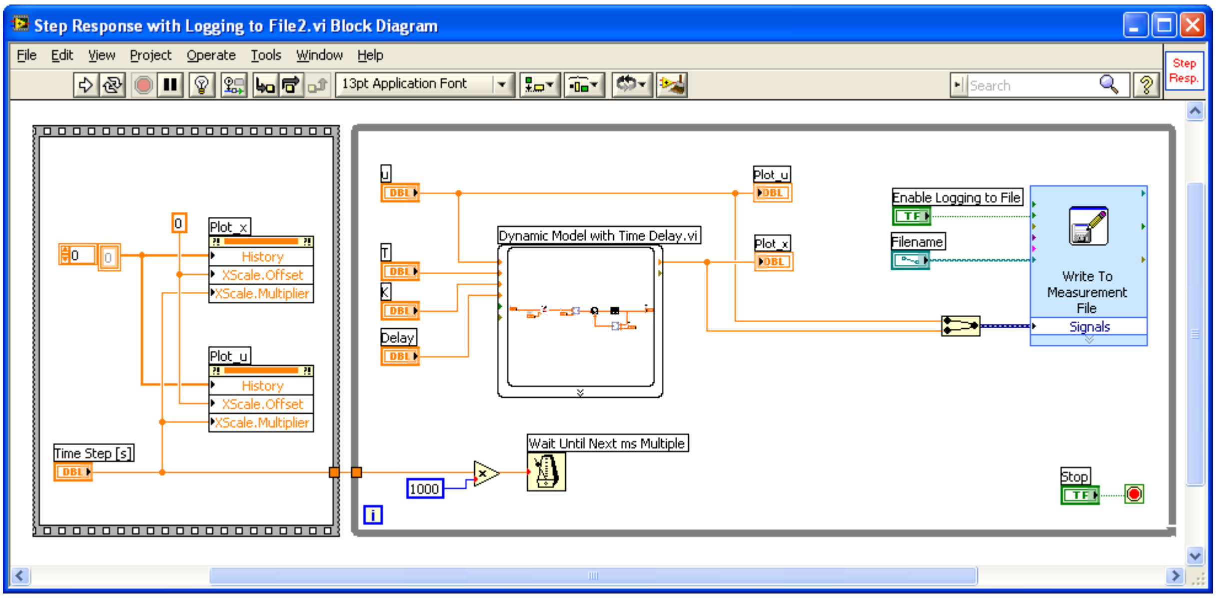
5 **Bruk modellen som du implementerte i en tidligere deloppgave som utgangspunkt. Bruk denne til å logge input (u) og output data (x).**

Lagre de loggede dataene til fil vha "Write To Measurement File".

Basert på en sprangrespons kan du finne dødtiden, τ.

Svar:

Bruker samme program som i tidligere deloppgave:



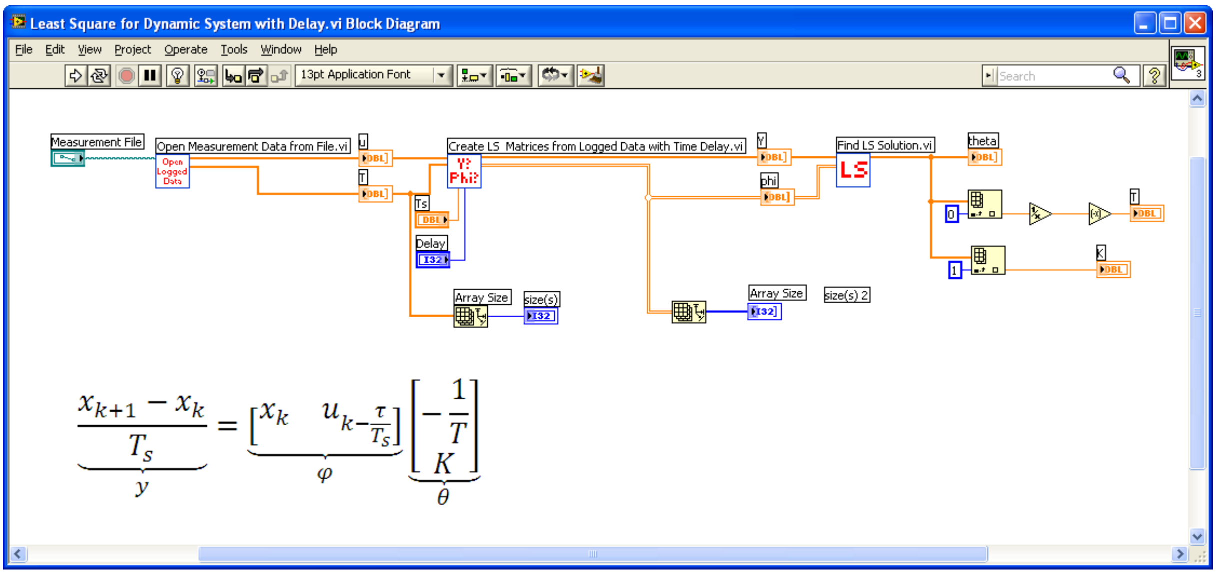
6 Finn modellparametrene (T og K) vha Minste kvadraters metode i LabVIEW.

Merk! Svaret bør da bli $T \approx 5$ og $K \approx 2$.

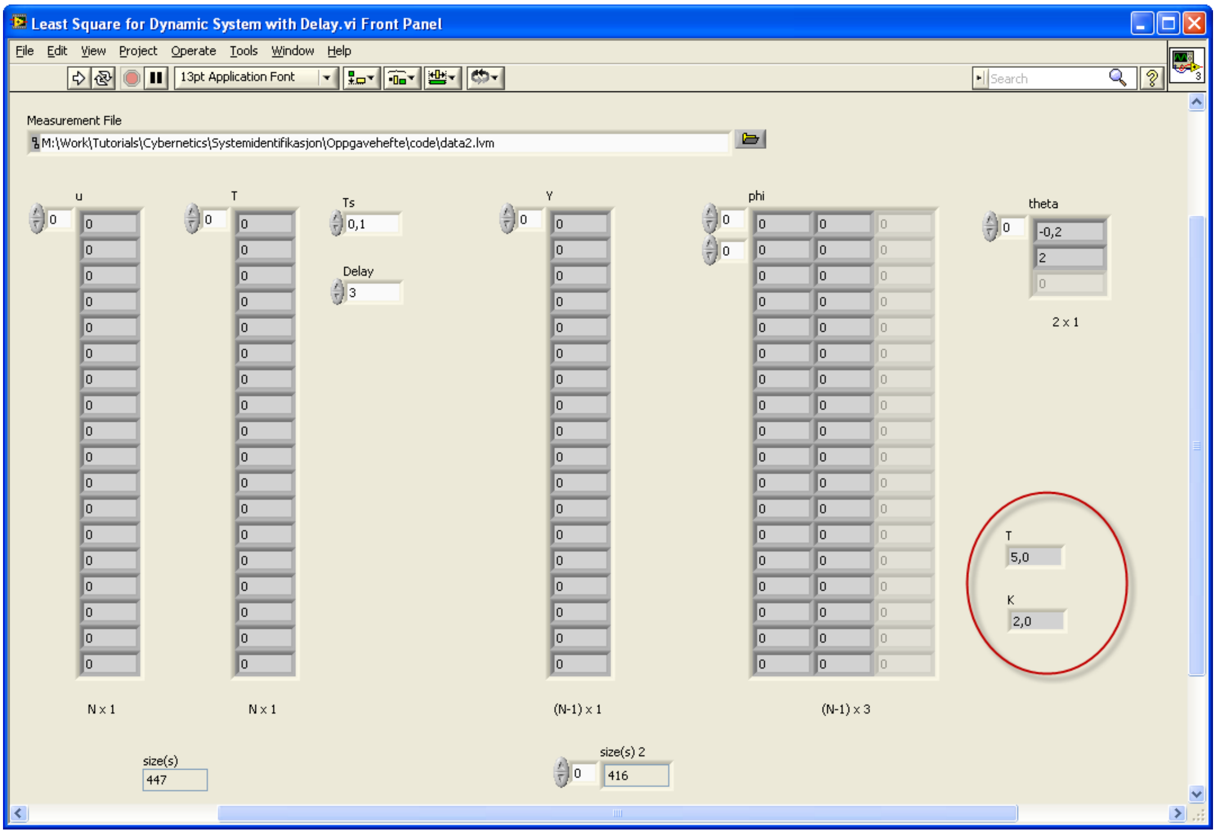
Svar:

LabVIEW kode:

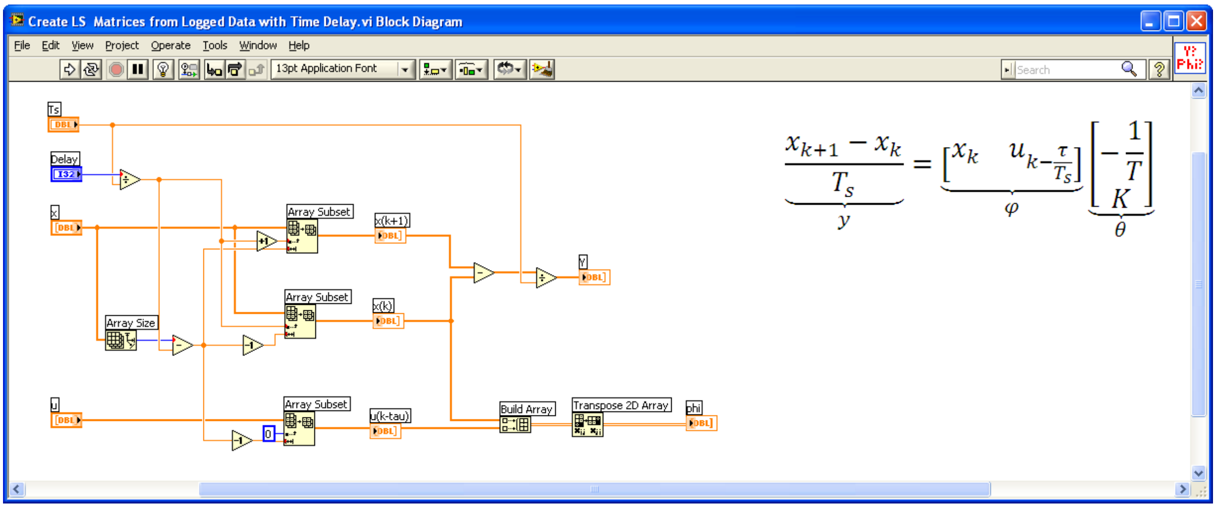
Blokkdiagrammet:



Frontpanelet:



Forskjellen fra forrige oppgave er der hvor man "stacker" Y og Φ:



7 **Finn PID parametre vha modellen for systemet og bruk Skogestad's metode.**

Svar:

Her er fremgangsmåten:

$$H_{psf}(s) = \frac{K}{Ts+1}e^{-\tau s} \tag{6}$$

(time-constant with time-delay) where

$$K = 1;\ T = 1 \text{ s};\ \tau = 0.5 \text{ s} \tag{7}$$

We use (5):

$$T_C = \tau = 0.5 \text{ s} \tag{8}$$

The controller parameters are as follows, cf. Table 1:

$$K_p = \frac{T}{K(T_C+\tau)} = \frac{1}{1\cdot(0.5+0.5)} = 1 \tag{9}$$

$$\begin{aligned} T_i &= \min\left[T,\ c\left(T_C+\tau\right)\right] && (10)\\ &= \min\left[1,\ 1.5\left(0.5+0.5\right)\right] && (11)\\ &= \min\left[1,\ 1.5\right] && (12)\\ &= 1 \text{ s} && (13) \end{aligned}$$

$$T_d = 0 \tag{14}$$

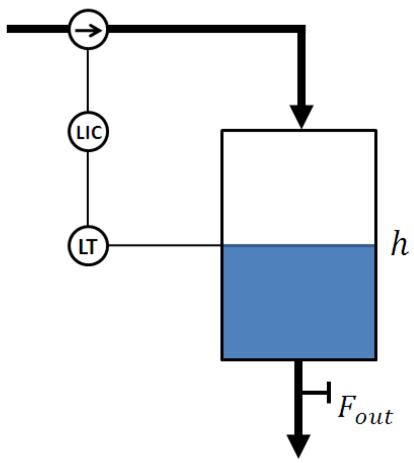
[Figure: F. Haugen, Advanced Dynamics and Control: TechTeach, 2010]

→ Vi bruker selvfølgelig verdiene $T = 5,\ K_{tot} = KT = 10,\ \tau = 3$ i vår beregning.

[End of Task]

Task 11: Systemidentifikasjon av vanntank

Gitt følgende system:



hvor h er nivået i vanntanken.

Vi ønsker å finne modellparametrene for denne tanken vha. systemidentifikasjon.

1 I systemidentifikasjon inngår ulike trinn. Forklar kort disse trinnene.

Svar:

I systemidentifikasjon inngår ulike steg, i hovedsak har vi følgende:

1. **Eksperimenter/Logging** – Vi setter opp et eksperiment og samler inn et sett med data fra inngangssignaler og utgangssignaler fra systemet som vi ønsker å identifisere. Det er viktig at systemet blir tilstrekkelig eksitert. Vi logger dataene til fil eller liknende.
2. **Oppsplitting** - Dele opp dataene i ulike datasett; ett datasett brukes til å finne modellen, mens det andre datasettet brukes til å validere modellen.
3. **Modellestimering** – Vi finner modellen eller modellparametrene vha. en eller flere systemidentifikasjonsmetoder (Minste kvadraters metode, Black-box, osv.).
4. **Validering** – Sjekk om modellen er bra nok vha f.eks simuleringer. Her er det viktig at vi bruker valideringsdataene – og ikke de samme dataene som vi brukte når vi fant modellen i trinn 3.

2 Vi ønsker å logge data for systemet beskrevet ovenfor.

Vi ønsker å logge nivået i tanken. Målesignalet fra vanntanken er $0-10V$, mens det fysiske nivået er mellom $0-20cm$. Vi trenger derfor å skalere signalet vi får fra DAQ enheten.

Vi bruker følgende lineære skalering:

$$y = ax + b$$

Finn parametrene a and b vha. **Minste kvadraters metode**.

Tip! Set systemet på formen $Y = \Phi\theta$ og løs a og b vha.:

$$\theta_{LS} = (\Phi^{\mathrm{T}}\Phi)^{-1}\Phi^{\mathrm{T}}\mathrm{Y}$$

Svar:

Vi setter det på formen $Y = \Phi\theta$ og får:

$$0 = a \cdot 0 + b$$

$$20 = a \cdot 10 + b$$

Dette gir:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}}_{\Phi} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}}_{\theta}$$

Vi bruker MKM formelen:

$$\theta_{LS} = (\Phi^{\mathrm{T}}\Phi)^{-1}\Phi^{\mathrm{T}}\mathrm{Y}$$

Med innsatte verdier får vi:

$$\theta_{LS} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix}$$

Videre:

$$\theta_{LS} = \left(\begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix}$$

og

$$\theta_{LS} = \left(\begin{bmatrix} 100 & 10 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix}$$

og

$$\theta_{LS} = \begin{bmatrix} \frac{1}{50} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dette gir:

$$\theta_{LS} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Likningen blir da:

$$\underline{\underline{y = 2x}}$$

NB! Følgende må være kjent:

Gitt en $2x2$ matrise:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Den inverse av A er da:

$$A^{-1} = \frac{1}{det\,(A)} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Determinanten for et $2x2$ system er som følger:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$det(A) = |A| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

3 Den matematiske modellen for vanntanken er gitt som:

$$\dot{h} = -K_1 h + K_2 u$$

Hvor

h er nivået i tanken

u er pådragssignalet til pumpa på innløpet (som vi bruker til å regulere nivået i tanken)

K_1 and K_2 er ukjente konstanter (som vi ønsker å finne)

Sett systemet på følgende form:

$$y = \varphi\theta$$

Siden vi skal implementere dette I en datamaskin, må vi ha det på diskret form. Vi bruker Euler forover metoden:

$$\dot{h} \approx \frac{h(k+1) - h(k)}{T_s}$$

Hvor T_s er samplingstiden.

Svar:

Vi har:

$$\dot{h} = -K_1 h + K_2 u$$

Dette gir:

$$\underbrace{\dot{h}}_{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} -h & u \end{bmatrix}}_{\varphi} \underbrace{\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}}_{\theta}$$

Vi diskretiserer:

$$\dot{h} \approx \frac{h(k+1) - h(k)}{T_s}$$

Dette gir:

$$\underbrace{\frac{h(k+1) - h(k)}{T_s}}_{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} -h(k) & u(k) \end{bmatrix}}_{\varphi} \underbrace{\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}}_{\theta}$$

4 Vi ønsker å finne modelparametrene (K_1 og K_2) and to do that we need to log input and output data for the system.

Følgende data er gitt:

k	$u[V]$	$h[cm]$
1	0.1	12
2	0.2	13
3	0.3	14
4	0.4	15
5	0.5	16
6	0.6	17

Samplingstid $T_s = 0.1s$ er brukt ved logging av dataene.

Sett systemet på følgende form:

$$Y = \Phi\theta$$

Svar:

Vi har:

$$\underbrace{\frac{h(k+1) - h(k)}{T_s}}_{y} = \underbrace{[-h(k) \quad u(k)]}_{\varphi} \underbrace{\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}}_{\theta}$$

Med innsatte data får vi:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{13-12}{0.1} \\ \vdots \\ \frac{17-16}{0.1} \end{bmatrix}}_{5x1} = \underbrace{\begin{bmatrix} -12 & 0.1 \\ \vdots & \vdots \\ -16 & 0.5 \end{bmatrix}}_{5x2} \underbrace{\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}}_{2x1}$$

Som gir:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}}_{Y} = \underbrace{\begin{bmatrix} -12 & 0.1 \\ -13 & 0.2 \\ -14 & 0.3 \\ -15 & 0.4 \\ -16 & 0.5 \end{bmatrix}}_{\Phi} \underbrace{\begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}}_{\theta}$$

Der med kan vi finne θ vha MKM formelen:

$$\theta_{LS} = (\Phi^{\mathrm{T}}\Phi)^{-1}\Phi^{\mathrm{T}}\mathrm{Y}$$

Bruk MathScript til å finne θ basert på dataene fra forrige deloppgave.

Svar:

MathScript kode:

```
clear, clc

Y = [10, 10, 10, 10, 10]';
phi = [-12, 0.1;
       -13, 0.2;
       -14, 0.3;
       -15, 0.4;
       -16, 0.5];

theta = inv(phi'*phi)*phi'*Y
```

Svaret blir:

```
theta =

           -0.9091

           -9.0909
```

Dvs.:

$$\theta = \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.9 \\ -9.1 \end{bmatrix}$$

eller:

$$\underline{\underline{\dot{h} = 0.9h - 9.1u}}$$

[End of Task]

3 Validering

Task 12:	Validering

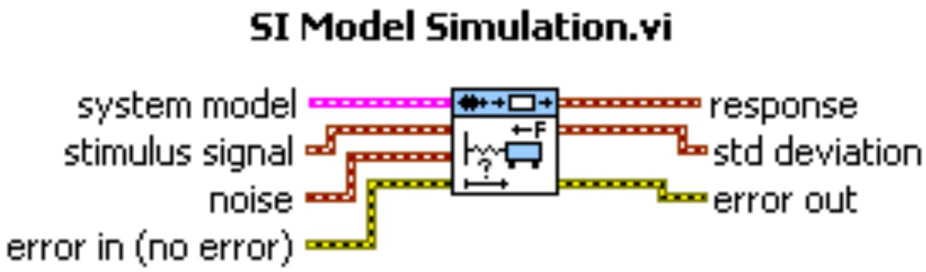
Tegn og forklar hvordan du vil validere en modell.

Svar:

Vi sjekker om modellen er bra nok vha f.eks simuleringer. Her er det viktig at vi bruker valideringsdataene – og ikke de samme dataene som vi brukte når vi fant modellen.

LabVIEW:

I LabVIEW finnes det flere funksjoner vi kan bruke til å validere modellen, f.eks. "**SI Model Simulation.vi**":



[End of Task]

Hans-Petter Halvorsen, M.Sc.

E-mail: hans.p.halvorsen@hit.no

Blog: http://home.hit.no/~hansha/

University College of Southeast Norway

www.usn.no